[한성은 모의고사]

| 3월 모의고사(가형) 연습 |

한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

3월 대비가 하나 더 필요해서 만들었습니당 ㅜㅜ
이정환(이투스) 선생님이 검토를 도와주셨습니다.

[~의 값은?]과 높임법 층위가 맞는 것은 [구하시오.]가 아니라 [구하여라.]인 것 같아요. 뇌피셜입니다.
여러 국어선생님들에게 여쭤봤지만 전혀 도움이 되질 않았습니다. 국어가 그렇죠 뭐.

hansungeun.com
- 저자소개, 학습자료, 교재판매

CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

[한성은 모의고사 3월 연습]

수학 영역(가형) 1

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 18

2. $\sin\frac{3\pi}{2}$의 값은? [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{n(n+1)}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (t^2+t+a)dt = 6$를 만족시키는 실수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

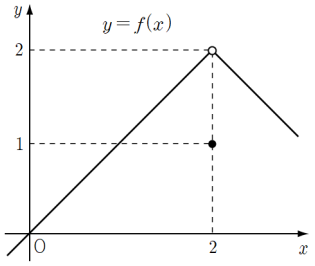
5. 두 문자 a, b를 중복을 허락하여 만든 6자리 문자열 중에서 a끼리는 이웃하지 않는 것의 개수는? [3점]

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2-2a_3+a_8=20$일 때, $a_{20}-a_{15}$의 값은? [3점]

① 25 ② 27 ③ 29
④ 31 ⑤ 33

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 2}(x+2)f(x)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

8. 도함수가 $f'(x)=6(x^2+x)$인 함수 $f(x)$의 극솟값이 2일 때, 극댓값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

9. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 x_1, x_2가

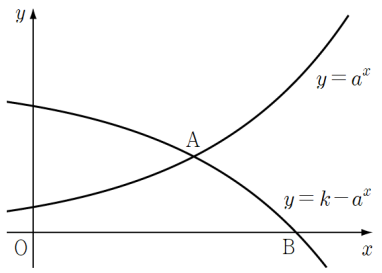
$$x_1=t^2-1, \quad x_2=-\frac{1}{2}t^2+4t+a$$

이다. 두 점 P, Q가 서로 만나며 속도가 같아지는 시각이 존재할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{3}$ ② -3 ③ $-\frac{10}{3}$

④ $-\frac{11}{3}$ ⑤ -4

10. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=k-f(x)$에 대하여, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점을 A, 곡선 $y=g(x)$와 x축의 교점을 B라 하자. $g(4)=4$이고 점 A의 x좌표와 점 B의 x좌표의 차이가 4일 때, $\overline{AB}$의 값은? (단, a와 k는 양의 실수이다.) [3점]



① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$

④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

11. 다항함수 $f(x)$가

$$\int_1^x (t-2)f(t)dt = x^3 + ax^2 + bx - 1$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

12. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & (x \le 1) \\ x^3 & (x > 1) \end{cases}$에 대하여

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값은? [3점]

① -9 ② -5 ③ -1
④ 1 ⑤ 5

13. $\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$인 실수 θ에 대하여

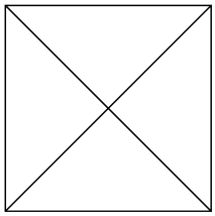
$$\tan\theta+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=4$$

일 때, $\cos^2\theta-\sin^2\theta$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. 그림과 같이 정사각형과 정사각형의 대각선으로 만들어진 도형이 있다. 정사각형 내부에 만들어지는 4개의 영역에 각각 한 가지 색만을 이용하여 칠한다. 서로 다른 네 가지 색을 이용하여 이웃하는 면이 구별되도록 색칠하는 방법의 수는? (단, 모든 색을 사용할 필요는 없으며, 면이 이웃하는 것은 변을 공유하는 경우만을 의미한다. 또, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



① 22 ② 24 ③ 26

④ 28 ⑤ 30

15. 다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여 $x \geq 0$일 때,

$$x^n - 1 \geq n(x-1) \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

ⅰ) $n=2$일 때,
$(x-1)^2 \geq 0$
이므로 (*)이 성립한다.
ⅱ) $n=k(k \geq 2)$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면,
$x^k - 1 \geq k(x-1)$
이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
$x^{k+1} - 1 - (k+1)(x-1)$
$= x(x^k - 1) + \boxed{\text{(가)}} - (k+1)(x-1)$
$\geq x\{k(x-1)\} + x - 1 - (k+1)(x-1)$
$= k \times \boxed{\text{(나)}}$
≥ 0
따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.
ⅰ), ⅱ)에 의해 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $x \geq 0$일 때,
$x^n - 1 \geq n(x-1)$
이 성립한다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(x)$이라 할 때, $f(5)+g(4)$의 값은? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

16. x에 대한 방정식 $(4^x + 4^{-x}) - a(2^x + 2^{-x}) + b = 0$가 세 실근을 갖고, 가장 큰 근이 2 이상이 되게 하는 a와 b 사이의 관계식과 a의 범위를 옳게 나타낸 것은? [4점]

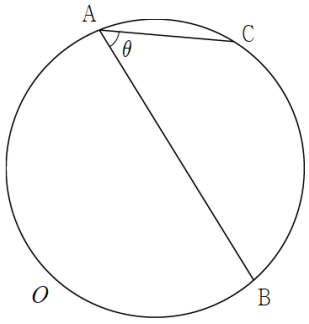
① $b = 2a - 2 \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$ ② $b = 2a - 2 \quad (1 \leq a)$
③ $b = 2a \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$ ④ $b = 2a \quad (1 \leq a)$
⑤ $b = 2a + 2 \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$

17. 함수 $f(x)=2x^3-5x^2+k$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$에서의 접선과 점 $(2\alpha, f(2\alpha))$에서의 접선이 서로 x축에 대하여 대칭이다. $k+\alpha$의 값은? (단, $\alpha \neq 0$) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$

④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

18. 원 O 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}=11$, $\overline{AC}=5$이고 $\angle CAB=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{4}{5}$이다. 원 O의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $\frac{7\sqrt{5}}{2}$

④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{5}}{2}$

19. 2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=n-x$의 교점의 x좌표를 a_n이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $2<a_4<3$

ㄴ. $n<a_n+\log_2 n$

ㄷ. $(a_n)^{n-1}<n^{a_n-1}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 네 양수 a, b, c, d에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos\{b(x-c)\}+d$$

의 최솟값은 -1이다. 방정식 $f(x)=0$의 양수인 근을 작은 수부터 크기순으로 세 개를 나열한 것이

$$2\pi,\ 6\pi,\ 8\pi$$

일 때, $\frac{bc}{a+d}$의 값은? (단, $0<c<6\pi$이다.) [4점]

① $\frac{2}{9}\pi$ ② $\frac{1}{3}\pi$ ③ $\frac{4}{9}\pi$
④ $\frac{5}{9}\pi$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

21. 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$는 세 실근 α, β, γ를 갖고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha+2\gamma=3\beta$
(나) $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=5$

$f(\alpha)$의 값은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

단답형

22. $\log_4 27\times\log_3 16$의 값을 구하여라. [3점]

23. 함수 $f(x)=x^3+x^2+x$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하여라. [3점]

24. 두 곡선 $y=x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2+ax$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 16일 때, 양수 a의 값을 구하여라. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{5}a_k=10$, $\sum_{k=1}^{5}ka_k=15$을 만족시킬 때, $\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+1)a_k\right\}\times\left\{\sum_{k=1}^{4}ka_{k+1}\right\}$의 값을 구하여라. [3점]

26. 양수 a와 0이 아닌 세 실수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2^x=3^y=a^z$

(나) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{z}$

a의 값을 구하여라. [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n-1} a_k = n^2+n, \quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = n^2+3n$$

일 때, $a_n a_{n+1}=24$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라. [4점]

28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{n+1}=1$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$6n^2 < a_n b_n < 6n(n+2)$$

이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하여라. [4점]

29. $a_1 = 16$이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} x - a_m & (x \le a_m) \\ \frac{1}{2}(x - a_m) & (x > a_m) \end{cases}$$

이다.

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 28m, \quad \sum_{k=1}^{2m} f(a_k) = -28$$

일 때, $f(a_{3m})$의 값을 구하여라. [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(t) & (x < t) \\ f(t) - f(x) & (x \ge t) \end{cases}$$

이고, t에 대한 함수 $h(t)$는 $g(x)$의 최댓값이다. $h(t)$가 $t = 0$, $t = 4$, $t = 8$을 제외한 모든 실수에서 미분가능하고 $h(4) = 4$일 때, $\int_{-2}^{10} h(t)dt$의 값을 구하여라. [4점]

[3월 모의고사 연습]

가형 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	①	03	④	04	④	05	⑤
06	①	07	③	08	②	09	④	10	②
11	②	12	④	13	②	14	②	15	⑤
16	①	17	③	18	①	19	②	20	③
21	①	22	6	23	17	24	6	25	125
26	72	27	23	28	24	29	28	30	48

COMMENT 10

$a^x = k - a^x$에서 $\mathrm{A}\left(\log_a 2 + \log_a k,\ \frac{k}{2}\right)$이고 $\mathrm{B}(\log_a k,\ 0)$이다.

$\log_a k - (\log_a k - \log_a 2) = 4$이므로 $a = \sqrt[4]{2}$, $g(4) = 4$에서 $k = 6$이다.

COMMENT 12

$f(x)$의 $x = 1$에서의 우미분계수는 3, 좌미분계수는 -2이다.

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = \lim_{h \to 0+} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \right\}$이다.

COMMENT 13

$\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$이므로 $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{4}$이다. $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = \frac{3}{2}$, $(\cos\theta - \sin\theta)^2 = \frac{1}{2}$이고

각을 재려보면 $\cos\theta + \sin\theta < 0$, $\cos\theta - \sin\theta < 0$이므로 $\cos\theta + \sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos\theta - \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

COMMENT 16

$t = 2^x + 2^{-x}$로 치환하자. $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$이므로 $t^2 - 2$이다. 준 방정식은 $t^2 - at + b - 2 = 0$이다.

t에 대한 이차방정식이다. 만족하는 t가 0개 또는 1개로는 x값 세 개를 얻을 수 없다. 따라서 방정식의 근은 두 개다.

모어오버, 곡선 $t = 2^x + 2^{-x}$를 재려보면 t값 하나는 2고, 하나는 2보다 큰 수여야 한다.

퍼더모어, 가장 큰 근 할 때 근은 x값이고 x값 2 이상에서 t는 $\frac{17}{4}$ 이상이다. 곡선 $t = 2^x + 2^{-x}$에서 확인.

COMMENT 17

$\alpha = 1$, $k = \frac{11}{2}$

COMMENT 19

ㄱ. $\log_2 2 < 4 - 2$이고 $\log_2 3 > 4 - 3$이다.

ㄴ. $\log_2 a_n = n - a_n$이고 $\log_2 a_n < \log_2 n$이므로

ㄷ. 준 식은 $\frac{\log_2 a_n}{a_n - 1} < \frac{\log_2 n}{n - 1}$이다. 기울기 봐봐.

COMMENT 20

$x = \pi$에서 최소, $x = 4\pi$에서 최대이고, 최댓값은 3이다. $\sin x$의 값이 $\pm\frac{1}{2}$가 될 때를 잘 생각해보자.

$a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 4\pi$, $d = 1$이다.

COMMENT 21

원함수의 변화량은 도함수의 넓이다. 대충 도함수를 $f'(x)=k(x+2a)x(x-a)$라 놓고

$\int_{-2a}^{0} f'(x)dx$와 $\int_{0}^{a} f'(x)dx$를 비교해보자. 대충 32 : 5가 떠서 답이 32라는 것을 알 수 있다.

COMMENT 27

$a_{2n}=(n^2+3n)-(n^2+n)=2n$,

$n\geq 2$일 때 $a_{2n-1}=(n^2+n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}=2$이다.

$a_1=2$이므로 $a_{2n-1}=2$.

$a_{11}a_{12}=24$, $a_{12}a_{13}=24$이다.

COMMENT 28

$\frac{b_n}{a_n}=\frac{a_nb_n}{a_n^2}=\frac{a_nb_n}{n^2}\times\left(\frac{n}{a_n}\right)^2$이므로 6×2^2으로 수렴한다.

COMMENT 29

공차를 d라 하자. $\sum_{k=1}^{m}a_k=28m$는 $\frac{16+16+(m-1)d}{2}=28$이므로 $(m-1)d=24$이다.

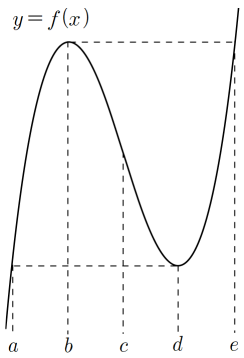
$\sum_{k=1}^{2m}f(a_k)$는 $-(m-1)d-(m-2)d-\cdots-2d-d+0+\frac{1}{2}d+d+\frac{3}{2}d+\cdots+\frac{m}{2}d$이므로 $-\frac{(m-1)m}{2}d+\frac{m(m+1)}{4}d=\frac{(3-m)md}{4}=-28$이다.

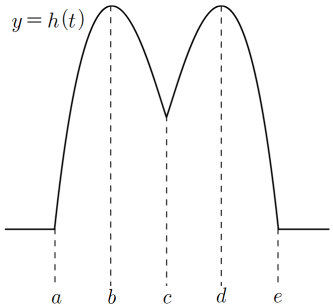
두 식을 연립하면 $m=7$, $d=4$이다.

COMMENT 30

$f(x)$가 극값을 가지지 않으면 모든 실수 t에 대하여 $h(t)=0$이다.

$f(x)$가 다음 그림과 같을 때, $h(t)=\begin{cases}0 & (t\leq a)\\ f(t)-f(d) & (a<t\leq c)\\ f(b)-f(t) & (c<t\leq e)\\ 0 & (e<t)\end{cases}$이다. 잘 따져보자. 좀 헷갈림요.





문제의 조건에서 $a=0$, $c=4$, $e=8$이고, 삼차함수의 성질에서 $b=2$, $d=6$이다.