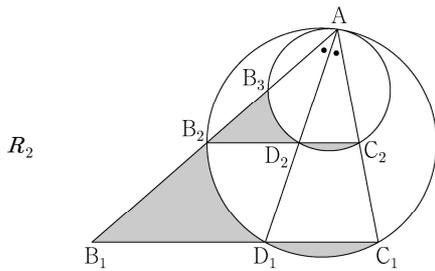
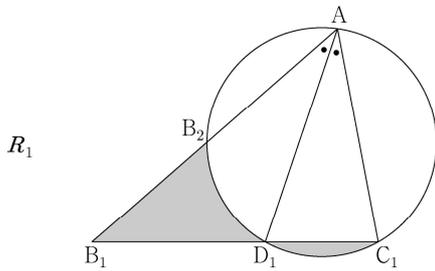


< 2021(6)-가형20 >

그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$ 이고 $\angle B_1AC_1 = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 AB_1C_1 이 있다. $\angle B_1AC_1$ 의 이등분선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 D_1 , 세 점 A, D_1, C_1 을 지나는 원이 선분 AB_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B_2 라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1 과 호 B_2D_1 로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1 과 호 C_1D_1 로 둘러싸인 부분인 \frown 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 점 B_2 를 지나고 직선 B_1C_1 에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1 과 만나는 점을 각각 D_2, C_2 라 하자. 세 점 A, D_2, C_2 를 지나는 원이 선분 AB_2 와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B_3 이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2 와 호 B_3D_2 로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2 와 호 C_2D_2 로 둘러싸인 부분인 \frown 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]¹⁾(2021(6)-가형20)

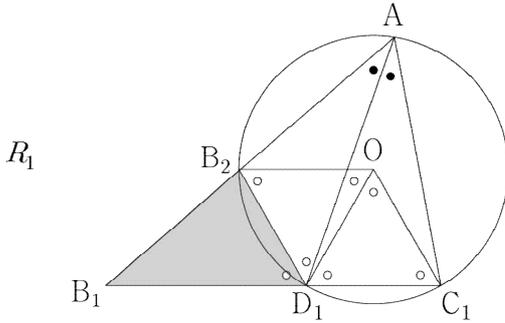


⋮

- ① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$ ④ $\frac{18\sqrt{3}}{46}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

1) [풀이1]

그림 R_1 에서 그려진 원의 중심을 O 라고 하자.



(단, $\circ = 60^\circ$, $\bullet = 30^\circ$)

우선 선분 B_1C_1 의 길이를 구하자.

코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1C_1} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{7}$$

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$$\angle C_1OD_1 = 60^\circ (= 2 \angle C_1AD_1),$$

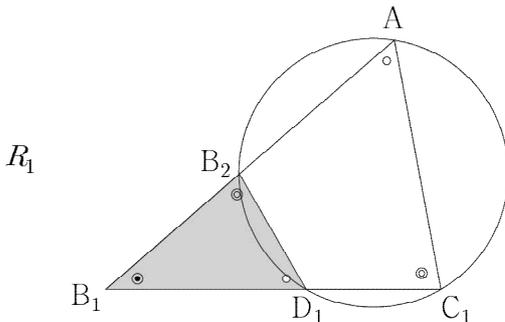
$$\angle D_1OB_2 = 60^\circ (= 2 \angle D_1AB_2)$$

원의 정의와 이등변삼각형의 성질에 의하여

두 삼각형 OD_1C_1 , OB_2D_1 은 서로 합동인 정삼각형이다.

그런데 $\angle C_1AB_1 = \angle B_2D_1B_1 = 60^\circ$ 이므로

두 삼각형 C_1AB_1 , $B_2D_1B_1$ 은 서로 닮음이다. (아래 그림)



(단, $\circ = 60^\circ$)

이제 $\overline{D_1C_1} = r$ 로 두자.

이때, 선분 D_1C_1 의 길이는 원 O 의 반지름의 길이와 같다.

$$\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = \overline{B_1D_1} : \overline{D_1B_2}$$

$$\text{즉, } 3 : 2 = \sqrt{7} - r : r, \quad r = \frac{2}{5} \sqrt{7}$$

이때, 다음을 알 수 있다.

$$\overline{D_1B_2} = \frac{2}{5} \sqrt{7}, \quad \overline{B_1D_1} = \frac{3}{5} \sqrt{7}, \quad \overline{B_2A} = \frac{8}{5}$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<https://atom.ac/books/7039>

<http://cafe.naver.com/2math>

S_1 의 값을 구하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{B_1D_1} \overline{D_1B_2} \sin 60^\circ = \frac{21\sqrt{3}}{50}$$

$$\overline{B_2A} = \frac{8}{5} \text{ 이므로 } \overline{B_1A} : \overline{B_2A} = 15 : 8$$

그러므로 그림 R_1 의 \frown 모양의 도형과 그림 R_2 에서 새롭게 그려진 \frown 모양의 도형의 넓이의 비는 $1 : \left(\frac{8}{15}\right)^2$ 이다.

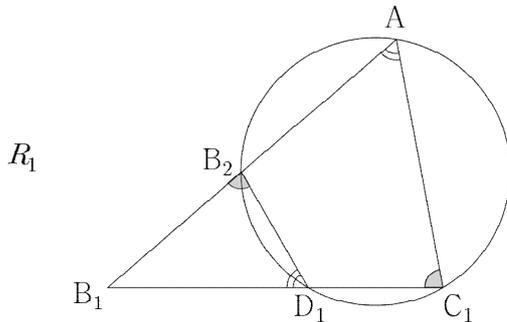
등비급수의 합 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1 - \left(\frac{8}{15}\right)^2} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

답 ①

[참고1]

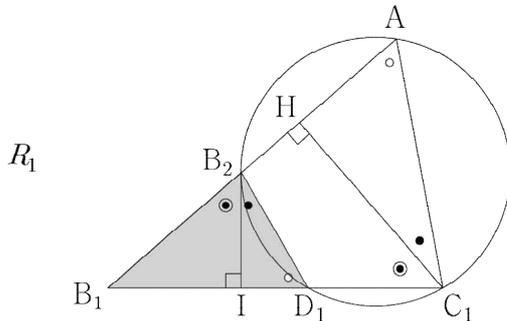
중학교 수학3 원주각 단원에서는 아래의 그림을 연습문제에서 다룬다.



[참고2]

다음과 같은 방법으로 원 O의 반지름의 길이 r 을 구해도 좋다.

점 C_1 에서 선분 AB_1 에 내린 수선의 발을 H , 점 B_2 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 I 라고 하자. 이때, 각각의 각이 아래 그림처럼 결정된다. 그리고 $\angle B_2B_1I = \theta$ 로 두자.



(단, $\circ = 60^\circ$, $\bullet = 30^\circ$)

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<https://atom.ac/books/7039>

<http://cafe.naver.com/2math>

특수각의 삼각비와 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{HB_1}=2, \overline{HC_1}=\sqrt{3}, \overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$$

두 삼각형 HB_1C_1, IB_1B_2 는 서로 닮음이므로

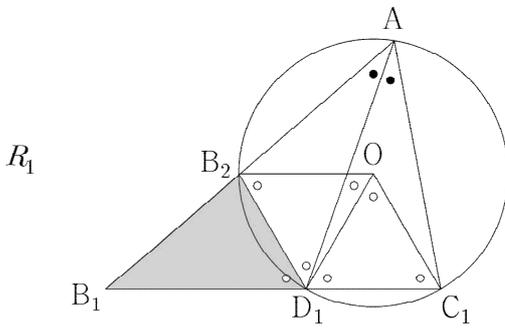
$$\overline{B_1I}:\overline{IB_2}=\overline{B_1H}:\overline{HC_1}$$

$$\text{즉, } \sqrt{7}-\frac{3}{2}r:\frac{\sqrt{3}}{2}r=2:\sqrt{3}$$

$$\therefore r=\frac{2}{5}\sqrt{7}$$

[풀이2]

그림 R_1 에서 그려진 원의 중심을 O 라고 하자.



(단, $\circ = 60^\circ, \bullet = 30^\circ$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$$\angle C_1OD_1 = 60^\circ (=2\angle C_1AD_1),$$

$$\angle D_1OB_2 = 60^\circ (=2\angle D_1AB_2)$$

원의 정의와 이등변삼각형의 성질에 의하여

두 삼각형 OD_1C_1, OB_2D_1 은 서로 합동인 정삼각형이다.

코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1C_1} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{7}$$

그런데

$$\overline{AB_1}:\overline{AC_1} = \overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1} = 3:2$$

(\because 각의 이등분선 정리(만약 이 정리를 모른다면 [참고3]의 방법을 따르면 된다.))

이므로

$$\overline{B_1D_1} = \frac{3}{5}\sqrt{7}, \overline{D_1C_1} = \frac{2}{5}\sqrt{7}$$

이제 S_1 의 값을 구하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{B_1D_1} \overline{D_1B_2} \sin 60^\circ = \frac{21\sqrt{3}}{50}$$

한편 코사인법칙에 의하여

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<https://atom.ac/books/7039>

<http://cafe.naver.com/2math>

$$\begin{aligned} \overline{B_1B_2}^2 &= \overline{B_1D_1}^2 + \overline{D_1B_2}^2 - \overline{B_1D_1} \overline{D_1B_2} \cos 60^\circ \\ &= \left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 2 \times \frac{3\sqrt{7}}{5} \times \frac{2\sqrt{7}}{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{49}{25}, \quad \text{즉 } \overline{B_1B_2} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

이때, $\overline{B_2A} = \frac{8}{5}$ 이므로 $\overline{B_1A} : \overline{B_2A} = 15 : 8$

그러므로 그림 R_1 의  모양의 도형과 그림 R_2 에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이의 비는 $1 : \left(\frac{8}{15}\right)^2$ 이다.

등비급수의 합 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1 - \left(\frac{8}{15}\right)^2} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

답 ①

[참고3]

다음과 같이 원 O 의 반지름의 길이를 구해도 좋다.

원 O 의 반지름의 길이를 r 이라고 하자.

$\overline{AD_1} = x$ 로 두자.

($\triangle AB_1C_1$ 의 넓이)

$= (\triangle AB_1D_1 \text{의 넓이}) + (\triangle AD_1C_1 \text{의 넓이})$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times (3+2) \times x \times \sin 30^\circ$$

$$x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

삼각형 AD_1C_1 에서 코사인법칙에 의하여

$$r^2 = 2^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2 \times 2 \times \frac{6\sqrt{3}}{5} \times \cos 30^\circ$$

$$\therefore r = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

[참고4] 교육과정 외

선분 B_1B_2 의 길이는 다음과 같이 구해도 좋다.

할선의 성질에 의하여

$$\overline{B_1D_1} \times \overline{B_1C_1} = \overline{B_1B_2} \times \overline{B_1A}, \quad \text{즉}$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<https://atom.ac/books/7039>

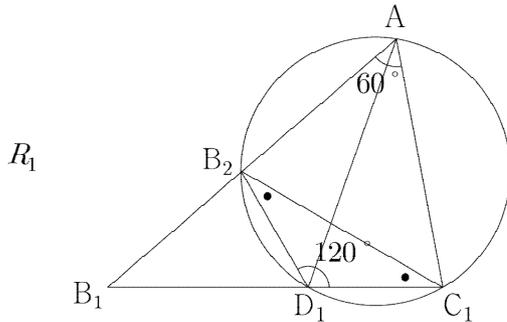
<http://cafe.naver.com/2math>

$$\frac{3}{5} \sqrt{7} \times \sqrt{7} = \overline{B_1B_2} \times 3, \therefore \overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$$

[참고5]

선분 AB_2 의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\overline{D_1C_1} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$ 까지는 유도했다고 하자.



(단, $\bullet = 30^\circ$)

$\overline{AB_2} = x$ 로 두자.

삼각형 $B_2D_1C_1$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_2C_1} = \frac{2\sqrt{21}}{5} (= \frac{2\sqrt{7}}{5} \times \sqrt{3})$$

($1:1:\sqrt{3}$ 의 비율관계를 암기해두는 편이 낫긴 하다.)

삼각형 AB_2C_1 에서 코사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}\right)^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos 60^\circ$$

정리하면

$$x^2 - 2x + \frac{16}{25} = 0, \left(x - \frac{8}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right) = 0$$

$$\therefore x = \frac{8}{5}, \text{ 즉 } \overline{AB_2} = \frac{8}{5}$$

(\because 만약 $x = \frac{2}{5}$ 이면 $\overline{B_2B_1} = \frac{13}{5}$ 이고, $\overline{B_1B_2} : \overline{B_2A} = 13 : 2$ 이므로 문제에서 주어진 그림과 맞지 않는다.)

[참고6]

삼각형 $B_2B_1D_1$ 의 넓이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

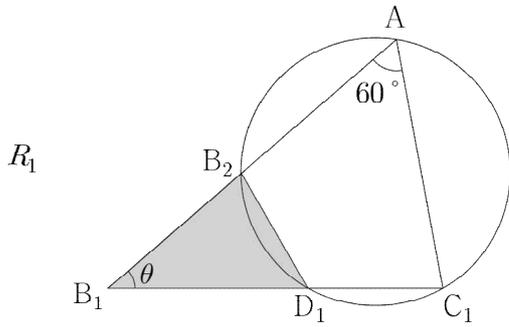
$$\overline{B_1D_1} = \frac{3}{5} \sqrt{7}, \overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$$

까지 유도했다고 하자.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<https://atom.ac/books/7039>

<http://cafe.naver.com/2math>



$\angle B_2B_1D_1 = \theta$ 로 두자.

삼각형 AB_1C_1 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

\therefore ($\triangle B_2B_1D_1$ 의 넓이)

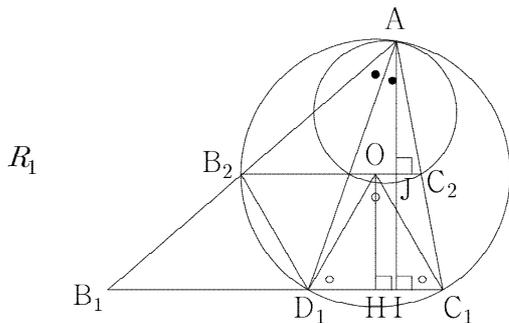
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{5} \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{21\sqrt{3}}{50} \end{aligned}$$

[참고7]

$\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 15 : 8$ 임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

$$\overline{D_1C_1} = \frac{2}{5} \sqrt{7}$$

까지 유도했다고 하자.



(단, $\circ = 60^\circ$, $\bullet = 30^\circ$)

두 점 A, O에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 각각 I, H, 점 A에서 선분 B_2O 의 연장선에 내린 수선의 발을 J라고 하자.

정삼각형 OD_1C_1 에서

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

($\triangle AB_1C_1$ 의 넓이)

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<https://atom.ac/books/7039>

<http://cafe.naver.com/2math>

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times \overline{AI} \text{에서}$$

$$\overline{AI} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

$$\overline{AJ} = \overline{AI} - \overline{OH} = \frac{8\sqrt{21}}{35}$$

두 삼각형 AB_2C_2 , AB_1C_1 의 닮음비는

$$\overline{AJ} : \overline{AI} = \frac{8\sqrt{21}}{35} : \frac{3\sqrt{21}}{7} = 8 : 15$$

이므로

$$\therefore \overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 15 : 8$$

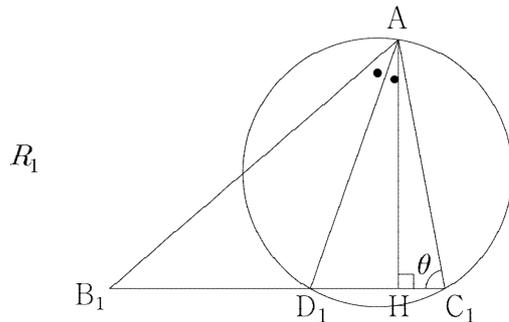
[참고8]

각의 이등분선 정리를 이용하지 않고 원 O의 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

$$\overline{B_1C_1} = \sqrt{7}$$

까지 유도했다고 하자.

점 A에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle AC_1D_1 = \theta$ 로 두자.



(단, $\bullet = 30^\circ$)

($\triangle AB_1C_1$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times (3+2) \times \overline{AD_1} \times 30^\circ$$

$$\overline{AH} = \frac{3\sqrt{21}}{7}, \quad \overline{AD_1} = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

직각삼각형 AC_1H 에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

삼각형 AD_1C_1 에서 사인법칙에 의하여

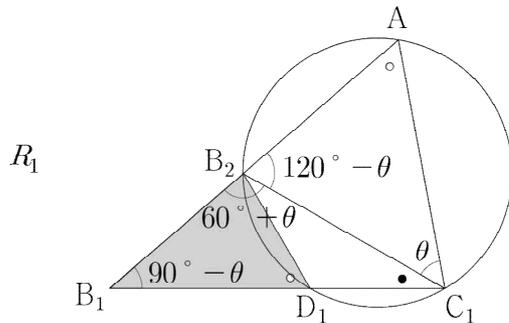
$$\frac{\overline{D_1C_1}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AD_1}}{\sin \theta}$$

$$\therefore \overline{D_1C_1} = \frac{2}{5} \sqrt{7}$$

[참고9]

다음과 같이 원 O의 반지름의 길이 r을 결정할 수 있다.

$\angle B_2C_1A = \theta$ 로 두면 다른 각들의 크기는 아래 그림과 같다.



(단, $\circ = 60^\circ$, $\bullet = 30^\circ$)

삼각형 AB_2C_1 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}r}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin(120^\circ - \theta)}$$

정리하면

$$r = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

(\because 삼각함수의 덧셈정리)

삼각형 $B_2B_1C_1$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}r}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{7}}{\sin(60^\circ + \theta)}$$

정리하면

$$r = \frac{\sqrt{7} \cos \theta}{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right)} \quad \dots \textcircled{2}$$

(\because 삼각함수의 덧셈정리)

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하면

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \text{에서 } \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

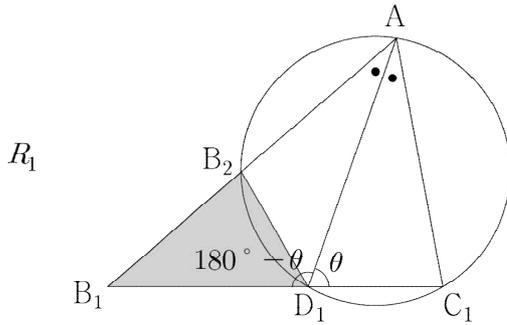
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\therefore r = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

[참고10]

다음과 같이 원 O의 반지름의 길이 r 을 결정할 수 있다.

$\angle AD_1C_1 = \theta$ 로 두자.



(단, ● = 30°)

두 삼각형 AB_1D_1 , AD_1C_1 각각에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{7}-r}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\sin(180^\circ-\theta)}, \quad \frac{r}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin \theta}$$

정리하면

$$\frac{3}{2} = (\sqrt{7}-r)\sin \theta, \quad \sin \theta = \frac{1}{r}$$

연립하면

$$\frac{3}{2}r = (\sqrt{7}-r)$$

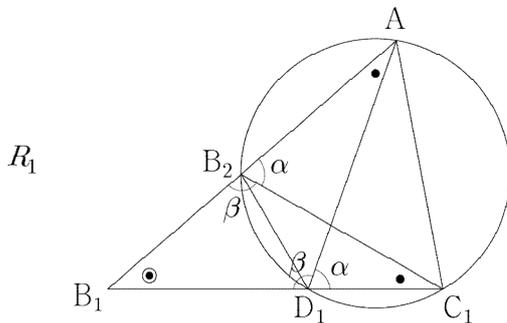
$$\therefore r = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

[참고11]

할선의 정리의 증명 과정을 이용하여 선분 B_1B_2 의 길이를 구할 수도 있다.

$$\overline{D_1C_1} = \frac{2}{5}\sqrt{7}, \quad \overline{B_1D_1} = \frac{3}{5}\sqrt{7}$$

까지 유도했다고 하자.



(단, ● = 30° , $\alpha + \beta = 180^\circ$)

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

<https://atom.ac/books/7039>

<http://cafe.naver.com/2math>

위의 그림처럼 호 AC_1 의 원주각을 α ,

$\beta = 180^\circ - \alpha$ 라고 하면

$$\angle B_1D_1A = \angle B_1B_2C_1 = \beta$$

이므로 두 삼각형 B_1D_1A , $B_1B_2C_1$ 는 서로 닮음이다.

$$\overline{C_1B_1} : \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} : \overline{B_1D_1}$$

$$\text{즉, } \sqrt{7} : \overline{B_1B_2} = 3 : \frac{3\sqrt{7}}{5}$$

$$\therefore \overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$$