Kice Archive

Ver. 2022

수학Ⅰ + 수학Ⅱ

평가원 14개년 고난도 기출문제 백과사전

Contents

Contents

[01~07] 2021학년도 대수능

1. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

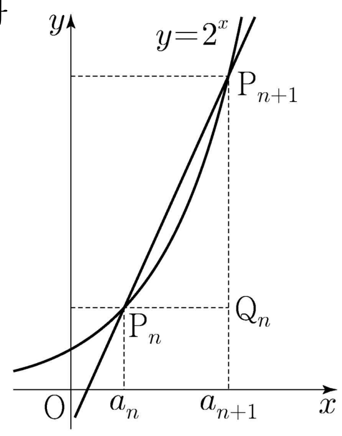
ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

2. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고
> 곡선 $y=2^x$위의 두 점 $\mathrm{P_n}(a_n, 2^{a_n})$, $\mathrm{P_{n+1}}(a_{n+1}, 2^{a_{n+1}})$을
> 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 $\mathrm{P_n}$을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 $\mathrm{P_{n+1}}$을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 $\mathrm{Q_n}$이라 하고 삼각형 $\mathrm{P_nQ_nP_{n+1}}$의 넓이를 A_n이라 하자.



다음은 $a_1=1$, $\frac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

> 두 점 $\mathrm{P_n}, \mathrm{P_{n+1}}$을 지나는 직선의 기울기가 $k\times a_n$이므로
> $$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$$
> 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은
> 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
> $k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
> 점 $\mathrm{Q_n}$의 좌표가 $(a_{n+1}, 2^{a_n})$이므로
> $$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$
> 이다. $\frac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{(가)}$이고,
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $$a_n=\boxed{(나)}$$
> 이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$이라 할 때, $p+\frac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

3. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

4. $\log_4 2n^2 - \dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$의 값이 40이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

5. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은? [4점]

6. 실수 $a(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

7. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

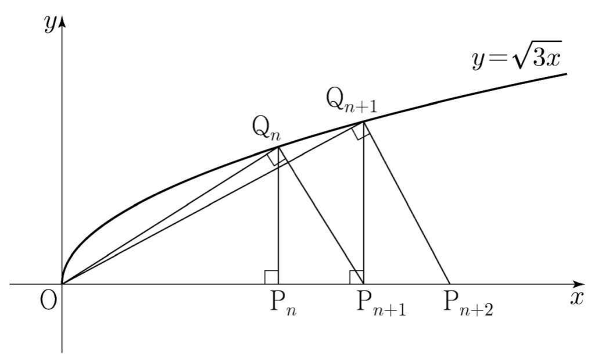
이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

[08~15] 2021학년도 9월 모의평가

8. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $\left(a_n, \sqrt{3a_n}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

9. 닫힌구간 $[-2\pi,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2,\ \ g(x)=3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

> 실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면
> $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$
> 이다.

10. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

11. $\angle \mathrm{A}=90^{\circ}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\log_2 x$, $\overline{\mathrm{AC}}=\log_4 \dfrac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) [4점]

12. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

14. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

15. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

[16~22] 2021학년도 6월 모의평가

16. $0 \leq \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta-2\alpha$의 값은? [4점]

17. 수열 a_n의 일반항은

$$a_n = (2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)} + (n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n} \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2}-1)\times \boxed{(가)} + m\times 2^{-m-1} \\ &= \boxed{(가)}\times\boxed{(나)} - \frac{m+2}{2}\times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2)\times 2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \dfrac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

19. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

20. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.

(나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

[23~29] 2022학년도 예비평가

23. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖고,
> 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

24. $0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^2-3x+k)dx>0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

25. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t)=3t^2-12t+9\ (t\geq 0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

26. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5=5$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n\geq 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$$

이다.

27. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

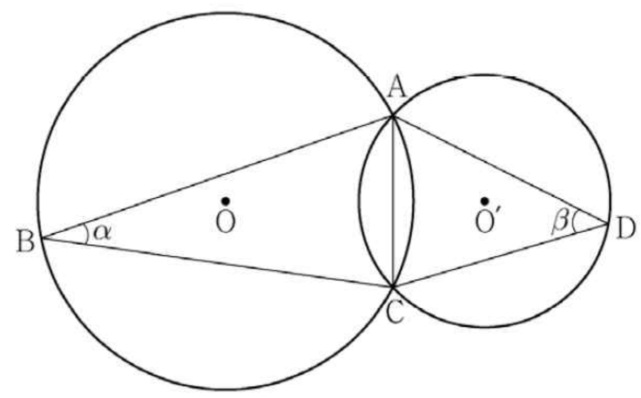
$$a_3+a_5=0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$, $\angle\mathrm{ADC}=\beta$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\quad \overline{\mathrm{OO'}}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p,q)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[-1,1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

[30~36] 2020학년도 대수능

30. 지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 B(4, 0)에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

31. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

32. 자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자.
$\sum_{k=1}^{9} \left\{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\right\}$의 값은? [4점]

33. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x \le 0) \\ x-1 & (0 < x \le 2) \\ 2x-3 & (x > 2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

34. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$

(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

35. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$이다.
>
> (나) $\int_0^2 f(x)\,dx = 5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

36. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
>
> (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

[37~39] 2020학년도 9월 모의평가

37. 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)\,dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

38. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) $3^a=5^b=k^c$

(나) $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

39. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

[40~44] 2020학년도 6월 모의평가

40. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\dfrac{1}{2}$보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\dfrac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\dfrac{5}{2}$이다.

41. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$ 인 자연수 n이 존재한다.

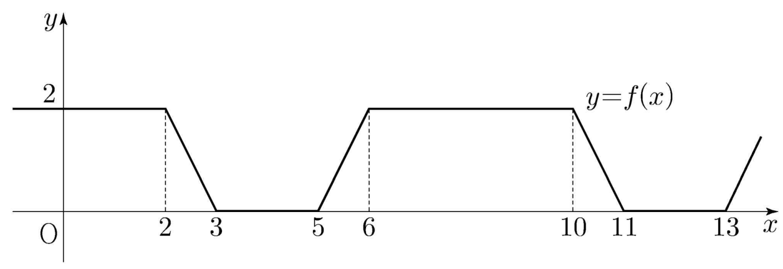
42. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\begin{cases} 2 & (0\le x<2) \\ -2x+6 & (2\le x<3) \\ 0 & (3\le x\le 4)\end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x-8)$이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}+n & (x\neq 0) \\ n & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f\circ g)(x)$가 상수함수가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n의 개수는? [4점]



43. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $4 < a_2 + a_3 \le 12$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

44. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \ge 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

[45~48] 2019학년도 대수능

45. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
>
> (나) $\int_0^6 f(x)\,dx=0$

함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

46. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
>
> (나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

47. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$
>
> (다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

48. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
>
> (나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
>
> (다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

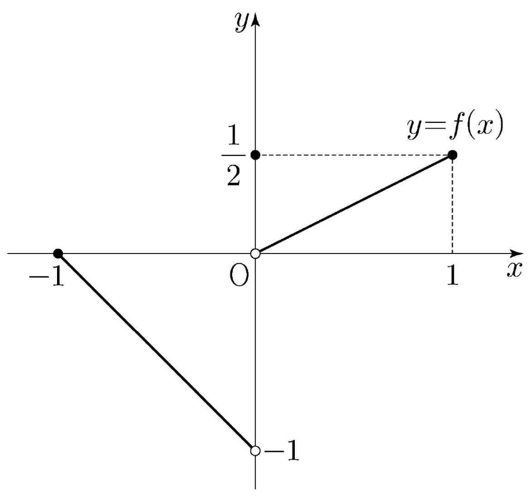
$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

[49~52] 2019학년도 9월 모의평가

49. 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



닫힌 구간 $[-1,\ 1]$ 에서 두 함수 $g(x),\ h(x)$ 가

$$g(x)=f(x)+|f(x)|,\ \ h(x)=f(x)+f(-x)$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

ㄴ. 함수 $|h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)|h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

50. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 에 대하여 $x\geq 0$ 에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$ 에서 $g(x)=c_1$ (c_1 은 상수)

(나) $1<x<5$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.

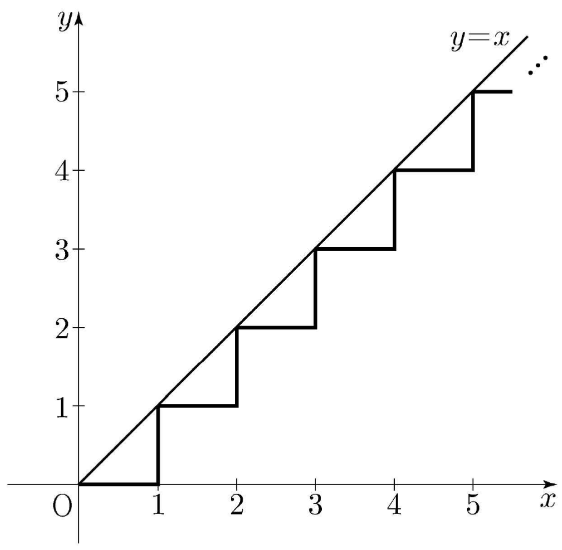
(다) $x>5$ 에서 $g(x)=c_2$ (c_2 는 상수)

$f(\sqrt{2})$ 의 값은? (단, $a,\ b$ 는 상수이다.) [4점]

51. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (i) A_0은 원점이다.
> (ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \dfrac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오. [4점]



52. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x)=x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1)<0,\ f'(2)<0,\ f'(0)-f'(1)=6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1<a<2<b$) [4점]

[53~57] 2019학년도 6월 모의평가

53. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

54. 함수 $f(x)=ax^2+b$ 가 모든 실수 x에 대하여

$$4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$$

를 만족시킨다. $f(2)$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

55. 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-1)>-1$
> (나) $f(1)-f(-1)>8$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

56. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

57. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 5이하의 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1) \text{ 이다.}$$

(나) $n=3,\ 4$ 일 때, $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\dfrac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

[58~61] 2018학년도 대수능

58. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

59. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
(나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 것을 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\frac{1}{3}$이다.

60. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq k) \\ 12(x-k) & (x > k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

61. 이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
> (나) $n \le x < n+1$일 때,
> $$g(x)=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$$
> 이다. (단, n은 자연수이다.)

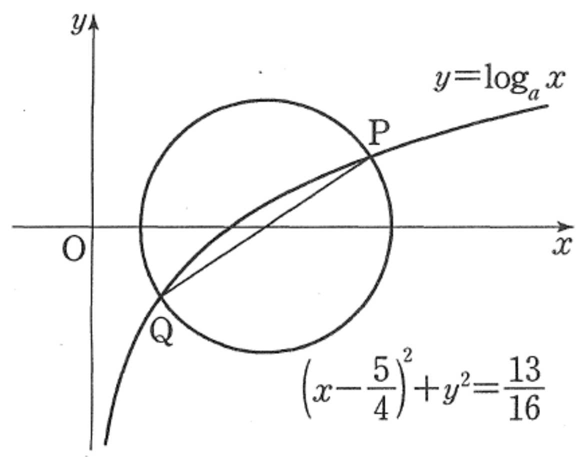
어떤 자연수 $k\,(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오. [4점]

[62~67] 2018학년도 9월 모의평가

62. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]



63. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x>0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $\lim_{x \to 0-} g(x) - \lim_{x \to 0+} g(x) = 6$ 일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

64. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1=a_2=1$, $b_1=k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2, \qquad b_{n+1}=a_n-b_n+n$$

을 만족시킨다. $b_{20}=14$일 때, k의 값은? [4점]

65. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.

ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

66. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

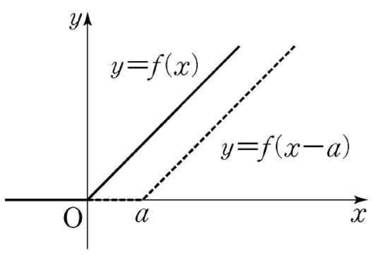
67. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

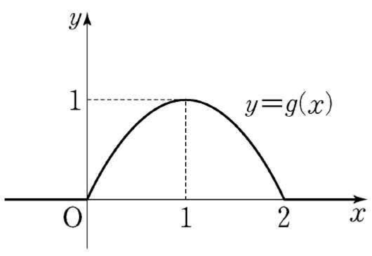
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x & (x>0) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \le 1) \\ 0 & (|x-1|>1) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

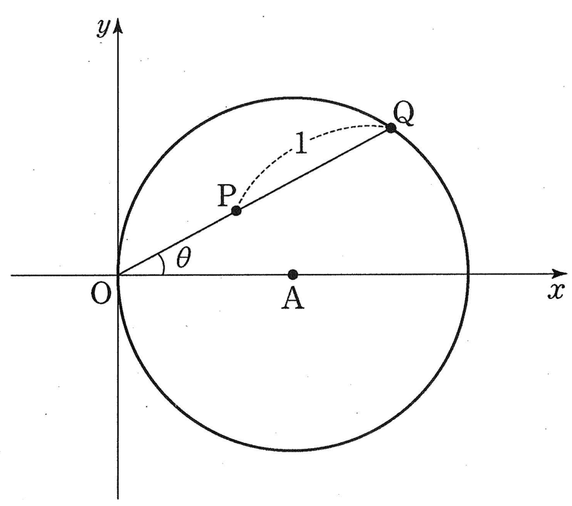
라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0 \le h(x) \le g(x)$일 때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]





[68~71] 2018학년도 6월 모의평가

68. 그림과 같이 좌표평면에 점 A(1, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점 Q에 대하여 $\angle \mathrm{AOQ}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$라 할 때, 선분 OQ 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$인 점 P를 정한다. 점 P의 y좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta=\frac{a+\sqrt{b}}{8}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.) [4점]



69. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1\ \ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점]

70. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1=a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} b_{n-1}+a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌경우}) \\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 3의 배수인경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10}=a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

71. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

[72~76] 2017학년도 대수능

72. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4점]

(가) $a_6+a_8=0$
(나) $\lvert a_6\rvert=\lvert a_7\rvert+3$

73. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

74. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t)+f(0)$$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ. $\int_0^k f'(x)\,dx < 0$

ㄴ. $0 < k \le 1$

ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

75. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c=7$

(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

76. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$ 의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f' \circ g)(x)$ 가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

[77~79] 2017학년도 9월 모의평가

77. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

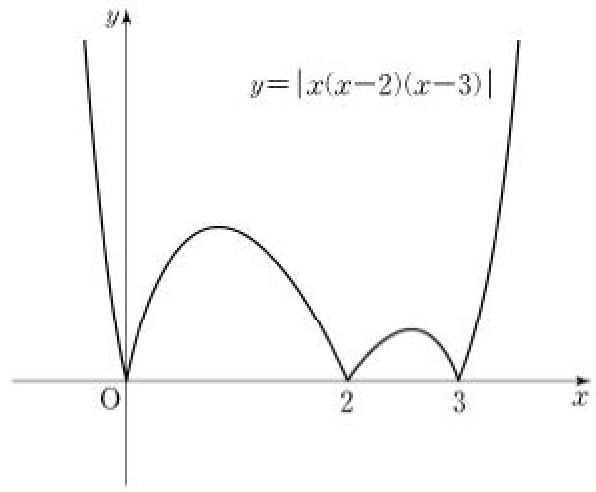
> (가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
> (나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> <보 기>
> ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
> ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

78. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

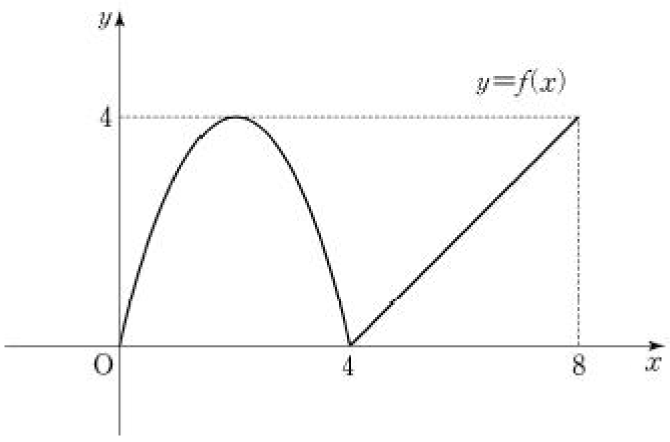
> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



79. 구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\displaystyle\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



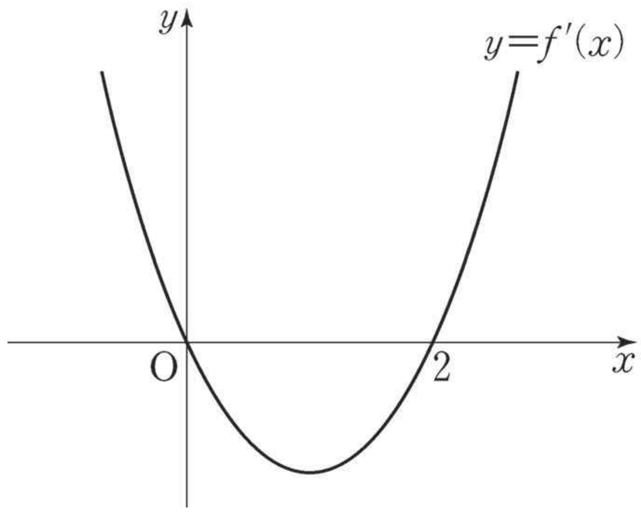
[80~83] 2017학년도 6월 모의평가

80. 첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$일 때, a의 값은? [4점]

81. 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

82. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 A$(-1,\ -1)$, B$(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점]

83. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
> $0 < b-a \le \dfrac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

[84~88] 2016학년도 대수능

84. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx = 10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

85. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점]

> (가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

86. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x \le a) \\ x^2-x & (x > a) \end{cases},\quad g(x)=x-(2a+7)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

87. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$
(나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

88. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 \lvert f(x)\rvert dx=-\int_0^2 f(x)dx=4$
(나) $\int_2^3 \lvert f(x)\rvert dx=\int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

[89] 2016학년도 9월 모의평가

89. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

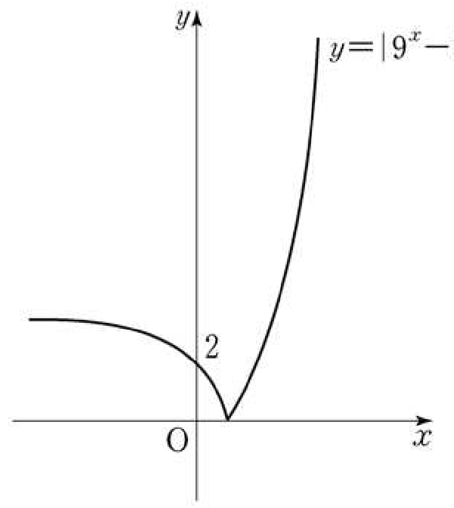
의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

[90~93] 2016학년도 6월 모의평가

90. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

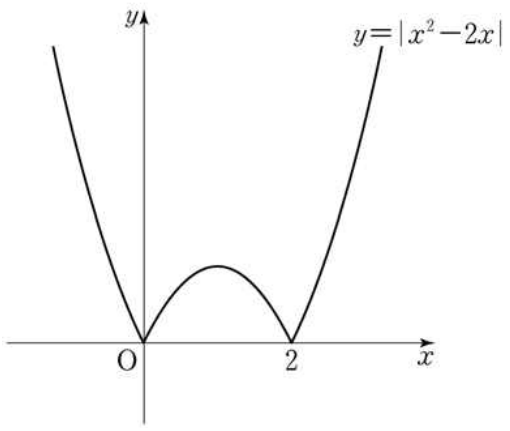


91. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

> (가) $f(n)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

92. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고항수의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. [4점]



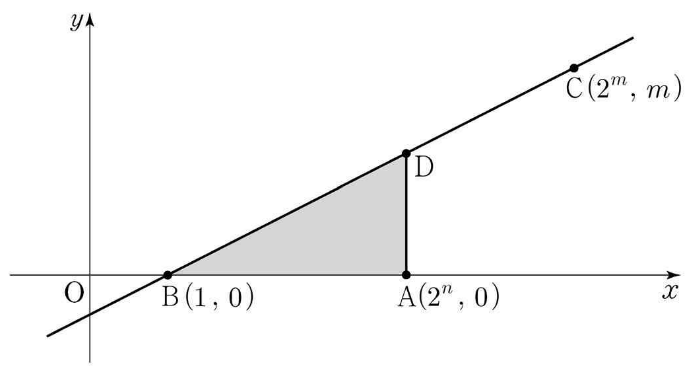
93. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수가 300 이상이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(2)f(3)f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a < n^k$이면 $b \le \log_n a$이다.
(나) $a \ge n^k$이면 $b \le -(a-n^k)^2 + k^2$이다.

[94~98] 2015학년도 대수능

94. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

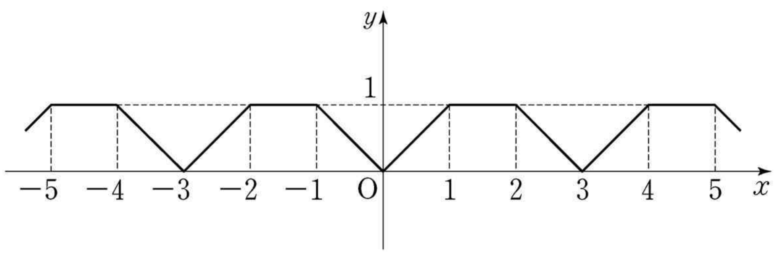
(가) 점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$이다.
(나) 두 점 B$(1, 0)$과 C$(2^m, m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.



95. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \\ -x+3 & (2 \le x < 3) \end{cases}$$

이다. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 13$일 때, 상수 a의 값은? [4점]



96. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge f'(x)$이다.

97. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$ 에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

98. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

(가) 점 A의 좌표는 $(-2,\ 3^n)$이다.
(나) 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b \le \log_2 a$를 만족시킨다.
(다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

[99~100] 2015학년도 9월 모의평가

99. 최고차항의 계수가 1 인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여
$6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$ 이다.

100. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $1 \le a \le 10,\ 1 \le b \le 100$
(나) 곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$과 만나지 않는다.
(다) 곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$와 적어도 한 점에서 만난다.

[101~103] 2015학년도 6월 모의평가

101. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.
> (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx = a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

102. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(1)=0$
> (나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

103. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2} = -11, \quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = -9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

[104~106] 2014학년도 대수능

104. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\log_3 n & (n\text{이 홀수})\\ \log_2 n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

20 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는? [4점]

105. 좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

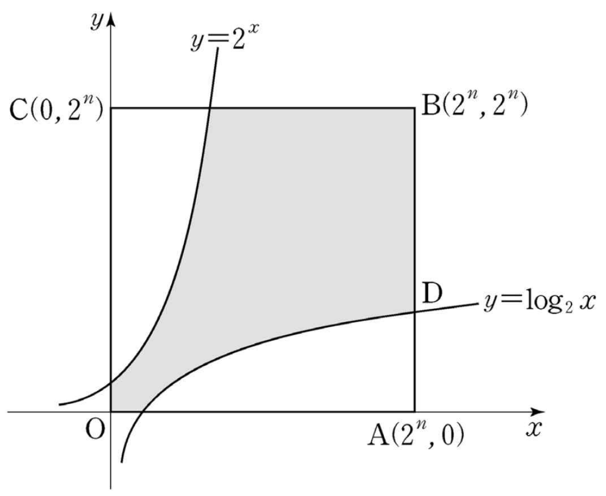
(가) $f(1)=2$ (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수이다.) [4점]

106. 좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x,\ y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. [4점]

[107~109] 2014학년도 9월 모의평가

107. 그림은 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $O(0,\ 0)$, $A(2^n,\ 0)$, $B(2^n,\ 2^n)$, $C(0,\ 2^n)$ 인 정사각형 $OABC$와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 을 나타낸 것이다. 선분 AB가 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 E, 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점을 F라 하자. 점 F의 y좌표가 16 일 때, 직선 DF의 기울기는? (단, n은 자연수이다.) [3점]



108. 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$ 가 구간 $(-\infty,\ 0)$ 에서 감소하고 구간 $(2,\ \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a, b 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 에 대하여, a^2+b^2 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값은? [4점]

109. 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n \leq 1$ 을 만족시키는 모든 자연수 k 의 합을 a_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[110~113] 2014학년도 6월 모의평가

110. 실수 t 에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t,\ t^3)$ 과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

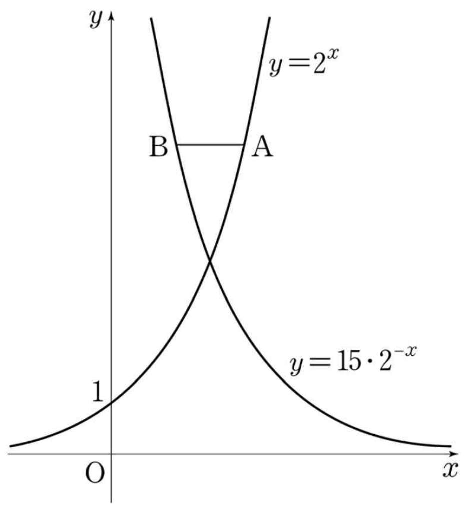
<보 기>

ㄱ. 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(t)$ 는 0 이 아닌 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 에서 미분가능하다.

111. 그림과 같이 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 한 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$ 의 그래프와 만나는 점을 B 라 하자. 점 A 의 x 좌표를 a 라 할 때, $1<\overline{AB}<100$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 a 의 개수는? [4점]



112. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단 a는 상수이다.) [4점]

113. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_n - 4 \quad (a = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 이다.

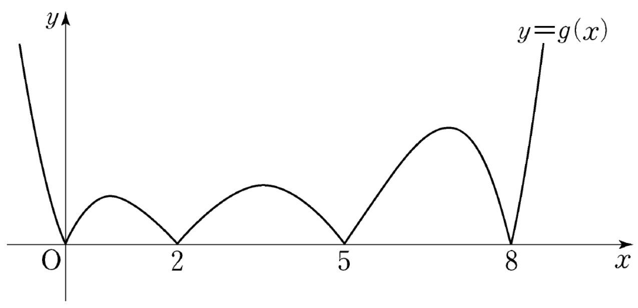
$\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$ 일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

[114~118] 2013학년도 대수능

114. 삼차함수 $f(x)$는 $f(0) > 0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \left| \int_0^x f(t)\,dt \right|$$

라 할 때, 함수 $g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f(x) = 0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
ㄴ. $f'(0) < 0$
ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)\,dx > 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

115. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y) \mid 2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\right\}$$

에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

> (가) x좌표와 y좌표는 서로 같다.
> (나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2,\ a_2 = 4$이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

116. 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (|x| \ge 1) \\ 1 & (|x| < 1) \end{cases},\quad g(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \ge 1) \\ -x & (|x| < 1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x)g(x) = -1$

ㄴ. 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

117. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

118. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고,

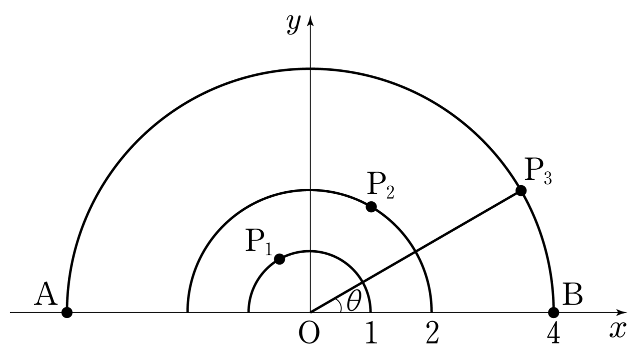
$\int_0^{2013} f(x)\,dx=\int_3^{2013} f(x)\,dx$를 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오. [4점]

[119~123] 2013학년도 9월 모의평가

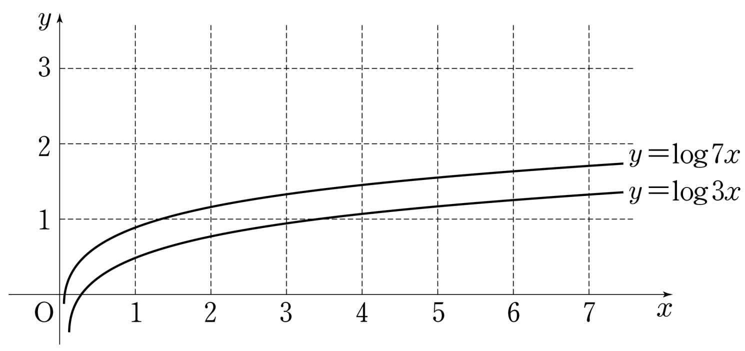
119. 그림과 같이 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1, 2, 4인 세 반원을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 세 점 P_1, P_2, P_3은 선분 OB 위에서 동시에 출발하여 각각 세 반원 O_1, O_2, O_3 위를 같은 속력으로 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. $\angle \mathrm{BOP}_3 = \theta$라 하고 삼각형 ABP_1의 넓이를 S_1, 삼각형 ABP_2의 넓이를 S_2, 삼각형 ABP_3의 넓이를 S_3이라 하자.

$3S_3 = 2(S_1 + S_2)$일 때, $\cos^3\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



120. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y = \log 3x$, $y = \log 7x$의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오. [4점]

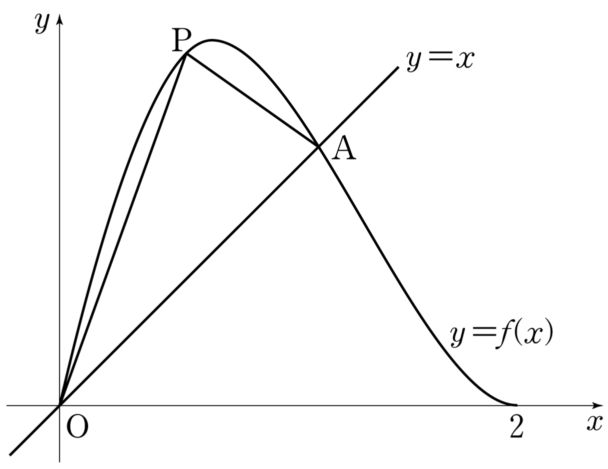
(가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.   (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



121. 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x) = ax(x-2)^2 \ \left(a > \frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y = f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은? [4점]

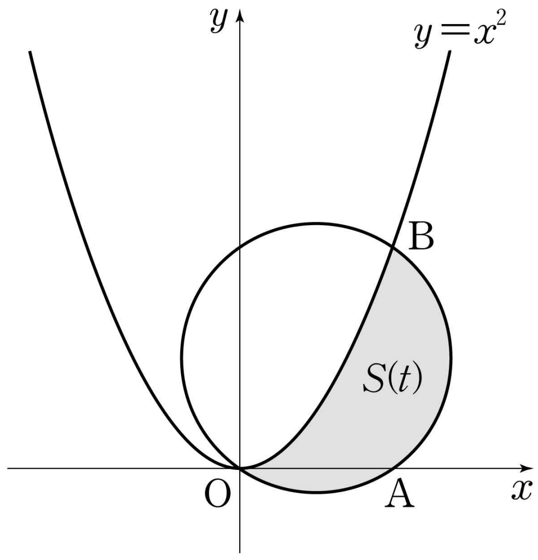


122. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x) = 6x^3 - x, \quad g(x) = |x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

123. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 O(0, 0), A(t, 0), B(t, t²) 을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\dfrac{p\pi+q}{4}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]



[124~129] 2013학년도 6월 모의평가

124. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할때, m의 값은? [4점]

125. 3 보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

(가) $a \geq 3$
(나) 두 점 $(2,\ 0)$, $(a,\ \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

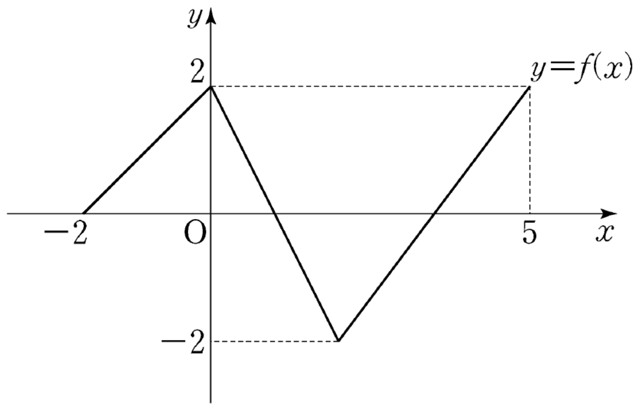
예를 들어 $f(5)=4$ 이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

126. 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (|x| \geq 1) \\ -x & (|x|<1) \end{cases}$ 에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 불연속인 점은 2 개다.
ㄴ. 함수 $(x-1)f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

127. 닫힌 구간 $[-2, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 a의 개수는?

[4점]

128. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=2$이고, $n\geq 1$일 때, a_{n+1}은

$$\frac{1}{n+2}<\frac{a_n}{k}<\frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k의 개수이다. a_{10}의 값을 구하시오.

[4점]

129. 방정식

$$4^{x}+4^{-x}+a\left(2^{x}-2^{-x}\right)+7=0$$

이 실근을 갖기 위한 양수 a의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

[130~132] 2012학년도 대수능

130. 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^{x}$이 직선 $x=t$ $(t \geq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.
다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $2 \leq a \leq 10$, $2 \leq b \leq 10$
> (나) $t \geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10$이다.

131. 이차함수 $f(x)$ 는 $f(0) = -1$ 이고,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

를 만족시킨다. $f(2)$ 의 값은? [4점]

132. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)| = 2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 일 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

[133~134] 2012학년도 9월 모의평가

133. 삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

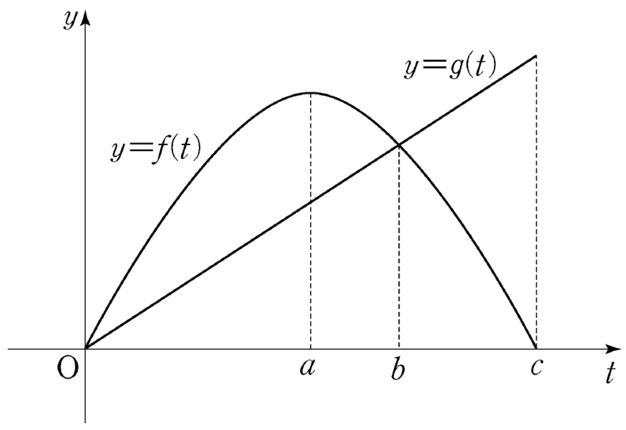
(가) 방정식 $f(x)-x=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖는다.
(나) $x=3$일 때 극값 7을 갖는다.
(다) $f(f(3))=5$

$f(f(x))$를 $f(x)-x$로 나눈 몫을 $g(x)$, 나머지를 $h(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. α, β, γ는 방정식 $f(f(x))-x=0$의 근이다.
ㄴ. $h(x)=x$
ㄷ. $g'(3)=1$

134. 같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 t $(0 \leq t \leq c)$ 에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)\,dt=\int_0^c g(t)\,dt$ 이고 $0 \leq t \leq c$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

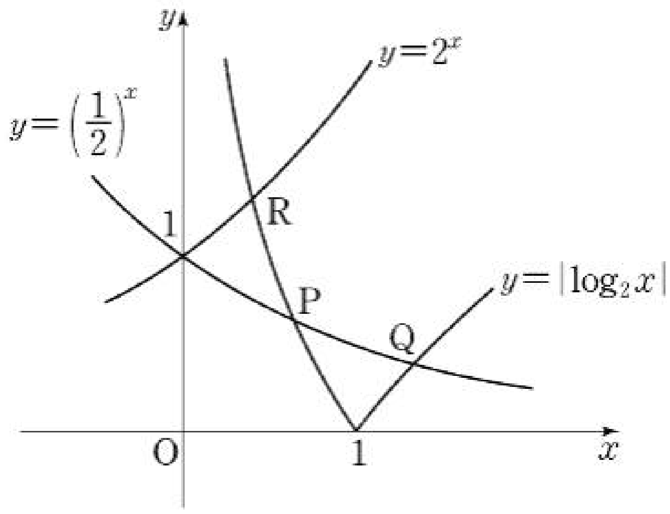
ㄱ. $t=a$ 일 때, 물체A는 물체B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$ 일 때, 물체A와 물체B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$ 일 때, 물체A와 물체B는 같은 높이에 있다.

[135] 2012학년도 6월 모의평가

135. 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n \in S$에 대하여 집합 $\{k \mid k \in S$이고 $\log_2 n - \log_2 k$는 정수$\}$의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$이고 $f(99)=1$이다. 이때, $f(n)=1$인 n의 개수를 구하시오. [4점]

[136~139] 2011학년도 대수능

136. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $R(x_3, y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

137. 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \leqq t \leqq 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \leqq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leqq t < 3) \\ t-3 & (3 \leqq t \leqq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

138. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a \mid$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점[

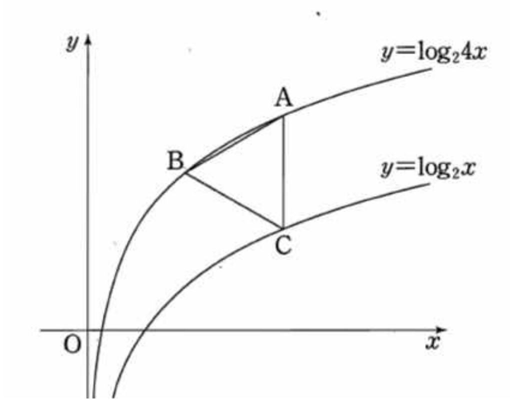
139. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$라 할 때, 10^p의 값을 구하시오. [4점]

[140~142] 2011학년도 9월 모의평가

140. 함수 $y = \log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y = \log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2 \times 2^q$의 값은? [4점]



141. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\ (a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

142. 함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 개구간 $(0, 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오. [3점]

[143~146] 2011학년도 6월 모의평가

143. 서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

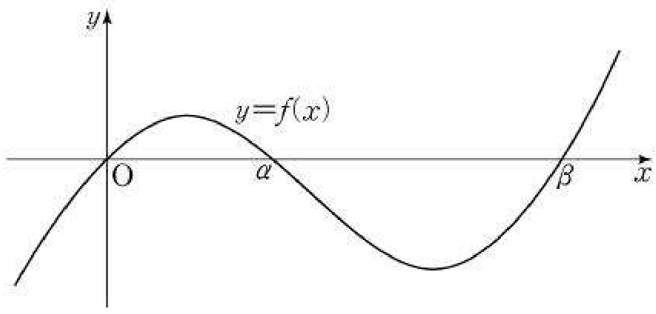
<보 기>

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.

ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.

ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

144. 삼차함수 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$ $(0<\alpha<\beta)$와 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(a)+(b-a)f'(x)$ 라고 하자. $a<0$, $\alpha<b<\beta$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다.

ㄴ. $g(b)>f(a)$

ㄷ. $g(a)>f(b)$

145. 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ g(x) & (x < 0) \end{cases}$$

라고 하자. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=g(0)$

ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

146. 최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=4$

[147~150] 2010학년도 대수능

147. 자연수 $n\,(n \ge 2)$ 에 대하여 직선 $y=-x+n$ 과 곡선 $y=\left|\log_2 x\right|$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 각각 $a_n,\ b_n\ (a_n < b_n)$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_2 < \dfrac{1}{4}$

ㄴ. $0 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

ㄷ. $1 - \dfrac{\log_2 n}{n} < \dfrac{b_n}{n} < 1$

148. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(-1)=f(1)$ 이고 $f'(-1)=f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1)<0$ 이다.

ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이면, 구간 $(-\infty,\ -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

149. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 t $(t \geq -1)$에 대하여 $-1 \leq x \leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

150. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2=1$일 때, a_8의 값을 구하시오. [4점]

[151~153] 2010학년도 9월 모의평가

151. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 k에 대하여

$$b_{2k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_3+\ \dots\ +a_{2k-1}}$$

$$b_{2k}=2^{a_2+a_4+\ \dots\ +a_{2k}}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고,

$$b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{10}=8$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는? [4점]

152. 다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오. [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ f(2))$에서 직선 $y=2$에 접한다.
(다) $f'(0)=0$

153. 좌표평면에서 세 점 $(15, 4)$, $(15, 1)$, $(64, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [4점]

[154~159] 2010학년도 6월 모의평가

154. $x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $|f(x)|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(|x|)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)-x^2|x|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

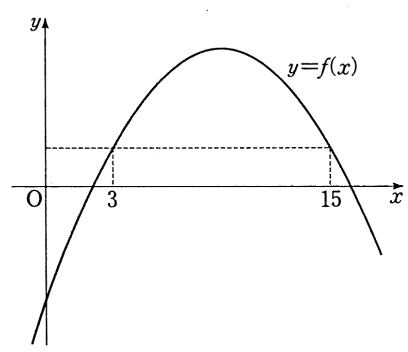
155. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = 5, \quad \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

156. 함수 $y = f(x)$는 $f(3) = f(15)$를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

m이 15 보다 작은 자연수일 때, $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{15} < 0$ 을 만족시키는 m의 최솟값을 구하시오. [4점]



157. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$ 에서 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $|f(x)-f(1)|$ 은 오직 $x=a$ $(a>2)$ 에서만 <u>미분가능하지 않다.</u>

158. 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키고,

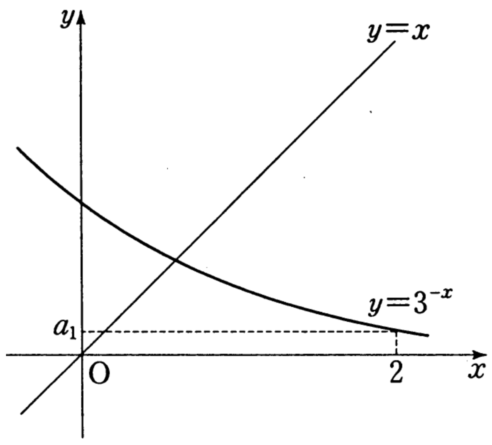
$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1 \qquad \left(-\frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{2}\right)$$

이다. 자연수 n 에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 5 가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합은? [4점]

159. 지수함수 $f(x)=3^{-x}$에 대하여

$$a_1=f(2),\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3)$$

일 때, a_2, a_3, a_4의 대소 관계는? [3점]



[160~162] 2009학년도 대수능

160. 두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
>
> (나) $f(4)+g(4)=\dfrac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$) [3점]

161. 다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $m \geq n$

ㄴ. $ab \geq 9$

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am = bn$이다.

162. $0 < a < \frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 $(p,\ p)$, 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 $(q,\ q)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다.

ㄴ. $p<q$

ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

[163~167] 2009학년도 9월 모의평가

163. 함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ -x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1,\,2)$에서 증가한다.
ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

164. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$
(나) $0<x<y<1$인 모든 $x,\ y$에 대하여
$0<xf(y)<yf(x)$

세 수 $A=f'(0)$, $B=f(1)$, $C=2\int_{0}^{1}f(x)dx$ 의 대소 관계는? [4점]

165. 두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=20$이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

166. 자연수 n에 대하여 함수 $y=2^{x+n}$의 그래프가 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 만나는 점을 $\mathrm{P_n}$이라 하자. 점 $\mathrm{P_n}$의 x좌표를 a_n, y좌표를 b_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{\mathrm{a_n}\}$은 등차수열이다.

ㄴ. 임의의 자연수 m, n에 대하여 $b_m b_n=b_{m+n}$이다.

ㄷ. $2b_n<b_{n+1}$을 만족하는 자연수 n이 존재한다.

167. 수열$\{a_n\}$에서 $a_n=3+(-1)^n$일 때, 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P_n}$을

$$\mathrm{P_n}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{3},\ a_n\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

라 하자. 점 $\mathrm{P_1}\sim\mathrm{P_5}$ 중에서 점 $\mathrm{P_{2009}}$와 같은 점인 것은? [3점]

[168~173] 2009학년도 6월 모의평가

168. 삼차함수 $f(x)=x(x-1)(ax+1)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$을 접점으로 하는 접선을 l이라 하자. 직선 l에 수직이고 점 P를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위는? [3점]

169. 공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2-1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_n = n$이면 $b_n = 4n-4$이다.

ㄴ. $d_1 d_2 = 4$

ㄷ. $a_1 \neq 0$이면 $a_n = n$이다.

170. 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자. $m>2$인 자연수 m에 대하여 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+m)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C(p, q), D(r, s)라고 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 점A의 x좌표는 점B의 x좌표보다 작고 $p<r$이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $p<-\frac{1}{3}$, $r>\frac{1}{2}$

ㄴ. 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기는 같다.

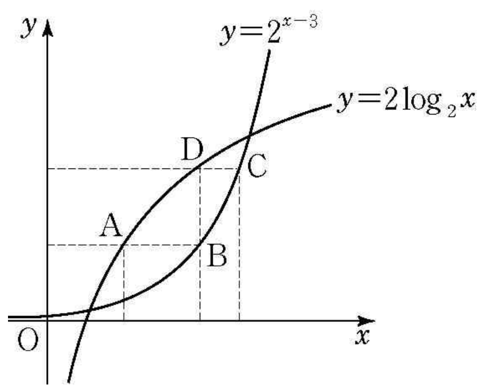
ㄷ. 점 B의 y좌표와 점 C의 y좌표가 같을 때, 삼각형 CAB의 넓이와 삼각형 CBD의 넓이는 같다.

171. 모든 계수가 정수인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(1)=5$
(다) $1<f'(1)<7$

함수 $y=f(x)$의 극댓값은 m이다. m^2의 값을 구하시오. [3점]

172. 그림과 같이 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{BD}=2$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



173. 부등식 $1 < m^{n-5} < n^{m-8}$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여

$$A = m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$B = m^{-\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$C = m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{-\frac{1}{n-5}}$$

이라고 할 때, A, B, C의 대소 관계는? [4점]

[174~175] 2008학년도 대수능

174. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) < 0$이다.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 작은 실근을 갖는다.

175. 직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_1 > y_2$

ㄴ. $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$

ㄷ. $x_1 y_1 > x_2 y_2$

[176~178] 2008학년도 6월 모의평가

176. 함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

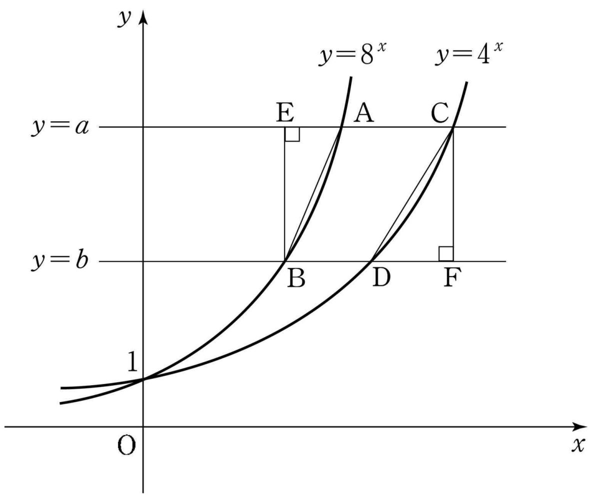
<보 기>

ㄱ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$이면 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$이다.

ㄴ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$이면 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} = 0$이다.

ㄷ. $f(x) = |x-1|$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} = 0$이다.

177. 그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자.
점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자.
삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는?
(단, $a>b>1$이다.) [3점]



178. 함수 $f(x)=\log_5 x$이고 $a>0, b>0$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\left\{f\left(\dfrac{a}{5}\right)\right\}^2=\left\{f\left(\dfrac{5}{a}\right)\right\}^2$

ㄴ. $f(a+1)-f(a)>f(a+2)-f(a+1)$

ㄷ. $f(a)<f(b)$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$이다.

1	ㄱ, ㄴ	26	72	51	8	76	65
2	130	27	25	52	40	77	ㄱ, ㄴ, ㄷ
3	92	28	26	53	1	78	$\frac{4}{3}$
4	13	29	14	54	3	79	43
5	27	30	$3^{\frac{2}{3}}$	55	ㄱ, ㄷ	80	39
6	$\sqrt{6}$	31	11	56	20	81	ㄱ, ㄴ, ㄷ
7	39	32	$\log 2+\log 3$	57	65	82	186
8	28	33	ㄱ, ㄴ	58	10	83	78
9	4	34	728	59	ㄱ, ㄷ	84	1
10	9	35	7	60	32	85	$\frac{1}{5}$
11	6	36	51	61	9	86	21
12	2	37	ㄱ, ㄴ, ㄷ	62	4	87	97
13	$\frac{29}{6}$	38	75	63	3	88	45
14	$-\frac{1}{4}$	39	42	64	-3	89	5
15	105	40	ㄱ, ㄴ, ㄷ	65	ㄱ, ㄴ	90	9
16	3π	41	14	66	10	91	3
17	16	42	30	67	200	92	8
18	ㄱ, ㄴ, ㄷ	43	162	68	34	93	120
19	162	44	19	69	$\frac{3}{2}$	94	109
20	7	45	18	70	13	95	10
21	58	46	$\frac{5}{13}$	71	243	96	48
22	38	47	117	72	-15	97	16
23	7	48	5	73	4	98	120
24	2	49	ㄱ, ㄴ	74	ㄱ, ㄴ, ㄷ	99	36
25	ㄱ, ㄷ	50	46	75	32	100	196

101	167	126	ㄱ, ㄴ, ㄷ
102	12	127	2
103	10	128	513
104	220	129	36
105	30	130	39
106	15	131	11
107	$-\frac{11}{28}$	132	18
108	$\frac{11}{2}$	133	ㄱ, ㄴ
109	103	134	ㄱ, ㄴ, ㄷ
110	ㄱ, ㄴ	135	25
111	49	136	ㄱ, ㄴ
112	13	137	ㄱ
113	11	138	147
114	ㄱ, ㄴ, ㄷ	139	21
115	573	140	$12\sqrt{3}$
116	ㄱ, ㄷ	141	1
117	2	142	13
118	40	143	ㄱ, ㄴ, ㄷ
119	$\frac{3}{4}$	144	ㄱ, ㄷ
120	79	145	ㄱ, ㄴ, ㄷ
121	$\frac{4}{3}$	146	19
122	$-\frac{4}{9}$	147	ㄴ, ㄷ
123	13	148	ㄱ, ㄷ
124	-12	149	17
125	86	150	16

151	$\frac{1}{5}$	176	ㄱ, ㄴ, ㄷ
152	13	177	30
153	63	178	ㄱ, ㄴ, ㄷ
154	ㄴ, ㄷ	179	
155	10	180	
156	5	181	
157	12	182	
158	9	183	
159	$a_2 > a_4 > a_3$	184	
160	1	185	
161	ㄱ, ㄴ, ㄷ	186	
162	ㄱ, ㄴ, ㄷ	187	
163	ㄱ, ㄴ	188	
164	$A > C > B$	189	
165	ㄱ, ㄴ	190	
166	ㄱ, ㄴ	191	
167	P_5	192	
168	$-1 < a < 0,\ 0 < a < \frac{1}{3}$	193	
169	ㄱ, ㄴ	194	
170	ㄱ, ㄷ	195	
171	32	196	
172	3	197	
173	$A > B > C$	198	
174	ㄱ, ㄴ	199	
175	ㄱ, ㄴ, ㄷ	200	

Kice Archive

Ver. 2022